Kapitola 1

POJEM FUNKCE A JEJÍ VLASTNOSTI

S funkční závislostí se setkáváme nejen v přírodních a technických vědách, ale i všude kolem sebe. Spotřeba benzínu závisí na počtu ujetých kilometrů, velikost zisku souvisí s počtem prodaných výrobků atd. Funkční závislost vyjadřuje, jak hodnota jedné veličiny závisí nebo ovlivňuje druhou veličinu. Popisem, co to funkce je a jaké má vlastnosti, jakými způsoby je možné funkci zadat a vytvářet nové funkce, se budeme zabývat v této úvodní kapitole.
Před studiem této kapitoly si zopakujte množinové pojmy, operace s množinami a množiny reálných čísel, zvláště pak intervaly. Některé z uvedených pojmů jsou popsány v Příloze.

1.1 Definice funkce, graf funkce

Funkce jedné proměnné

Definice 1.1.: Nechť D a H jsou neprázdné množiny reálných čísel. Funkcí f reálné proměnné x nazýváme pravidlo, které každému číslu $x \in D$ přiřazuje právě jedno číslo $y \in H$. Píšeme pak $y = f(x)$.

Číslo $x \in D$ se nazývá nezávisle proměnná nebo argument funkce, číslo $y \in H$ se nazývá závisle proměnná nebo funkční hodnota.
Množina D se nazývá definiční obor. Není-li při zadávání funkce uvedeno jinak, je to množina čísel, pro která má daná funkce smysl. Definiční obor funkce $y = f(x)$ se značí $D(f)$.
Množina čísel $y \in H$, ke kterým existuje $x \in D$ tak, že $y = f(x)$, se nazývá obor hodnot. Pro funkci $y = f(x)$ se značí $H(f)$.

Určování definičního oboru

Definiční obor funkce $y = f(x)$ určujeme jako množinu všech reálných čísel, pro která lze provést všechny početní operace uvedené v rovnici funkce.

Příklad 1.1.

Určete definiční obor funkce: a) $f : y = \dfrac{3}{x^2 - 4}$, b) $g : y = \sqrt{x+3}$.

Řešení: a) Protože nelze dělit nulou, patří do definičního oboru funkce f všechna reálná čísla, pro která je $x^2 - 4 \neq 0$. Tedy definičním oborem je množina $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.
b) Protože druhá odmocnina z reálného čísla je definována pouze pro nezáporná čísla, patří do definičního oboru funkce g všechna reálná čísla, pro která platí $x + 3 \geq 0$. Tedy daná funkce má definiční obor $D(g) = \langle -3, \infty)$.

Funkce f je tedy předpis, který každému číslu x z definičního oboru přiřadí právě jedno reálné číslo $y = f(x)$. Tento předpis je nejčastěji zadán vzorcem, např. $y = x^2 + 1$. Pokud takový vzorec neexistuje, je možné funkci zadat i jiným způsobem. Každý z těchto způsobů má své přednosti a nevýhody.
Je-li funkce zadaná například grafem, je dobře vidět vývoj funkčních hodnot se změnou proměnné x, ale není možné z grafu určit přesnou funkční hodnotu v konkrétním bodě.
Je-li funkce zadaná tabulkou, známe hodnoty funkce pro několik daných hodnot proměnné x, ale neumíme určit funkční hodnoty pro jiné hodnoty proměnné.

Způsoby zadání funkce

- Funkce zadané rovnicí

a) explicitní rovnicí $y = f(x)$

Předpis, kterým je každému $x \in \mathbf{R}$ přiřazeno číslo $2x - 1$, je příklad funkce definované na množině **R** implicitní rovnicí. Píšeme nejčastěji $f : y = 2x - 1$.

Další příklady funkcí $g : y = 3x$, $h : y = 2x^2 - 3x + 1$, $k : y = \sqrt{2x - 1}$.

b) implicitní rovnicí $F(x, y) = 0$

V případě implicitně zadané funkce není proměnná y vyjádřena samostatně. Tak je tomu například u funkce $x^2 - 2x + 1 + y = 0$. U této funkce však můžeme proměnnou y vyjádřit ve tvaru $y = 2x - x^2 - 1$.

U některých implicitních funkcí však proměnnou y vyjádřit není možné. Tak je tomu například u funkce $e^{xy} + y - y^2 = 0$.

Další způsoby zadání funkce rovnicí.
Funkční předpis může být vyjádřen i několika vzorci, například :

$$y = \begin{cases} 1 + x \text{ pro } x \in (0, \infty), \\ 0 \text{ pro } x = 0, \\ 1 - x \text{ pro } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

V některých případech může být funkce zadána přímo výčtem funkčních hodnot pro všechny hodnoty argumentu. Například funkce, kterou označujeme sgn x (čti signum x) je definovaná

předpisem: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ pro } x > 0, \\ 0 \text{ pro } x = 0, \\ -1 \text{ pro } x < 0. \end{cases}$

- Funkce zadané slovním předpisem

Funkci $g : y = 3x$ lze zadat i slovně tak, že každému reálnému číslu x je přiřazen jeho trojnásobek.
Další příklady funkcí zadané slovním předpisem:
Dráha rovnoměrného přímočarého pohybu je rovna součinu rychlosti a času.
Proud ve vodiči je přímo úměrný napětí na koncích vodiče a nepřímo úměrný odporu vodiče.

- Funkce zadané tabulkou

V následující tabulce jsou uvedena experimentálně zjištěná data o tom, jaké množství Glauberovy soli je možno rozpustit ve 100 gramech vody v závislosti na teplotě.

$\frac{t}{^{o}C}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\frac{m}{g}$	5,4	9,2	16,1	34	50	47,8	45,6	44	43,2	42,6	42,1

Je-li definiční obor konečný, je možné i pomocí tabulky popsat funkci vyčerpávajícím způsobem. Omezíme-li například u funkce $g: y = 3x$ definiční obor podmínkou, že každému přirozenému číslu x menšímu než 7 je přiřazen jeho trojnásobek, můžeme tuto funkci zadat tabulkou :

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

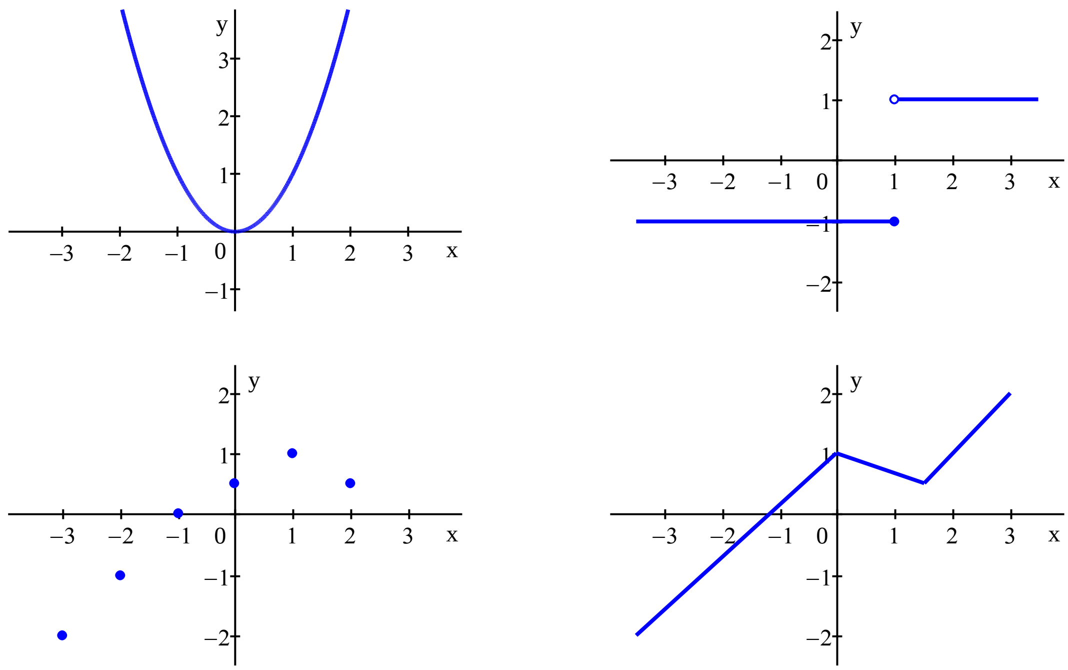
- Funkce zadané graficky

Graf funkce

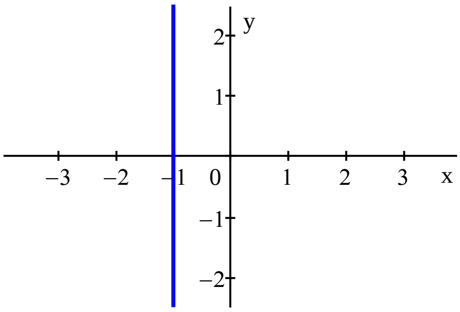
Definice 1.2.: Graf funkce $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ je množina všech bodů v rovině o souřadnicích $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$.

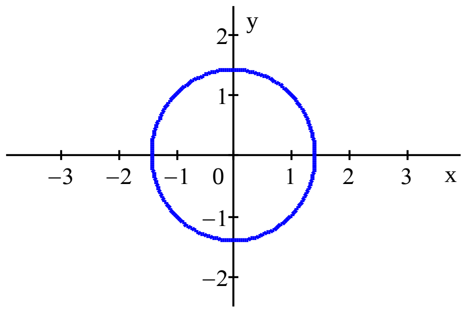
Příklady grafů funkcí

Funkci graficky zobrazujeme v pravoúhlé (kartézské) souřadnicové soustavě s počátkem O a se dvěma navzájem kolmými osami x, y. Na obrázcích jsou příklady několika funkcí zadaných graficky :



Naopak následující grafy nezobrazují funkce, protože nevyhovují definici funkce. K některým hodnotám proměnné x jsou totiž přiřazeny dvě nebo i více hodnot proměnné y.





Znalosti o funkčních závislostech a jejich grafech lze využít při řešení praktických problémů, jak ukazuje následující úloha.

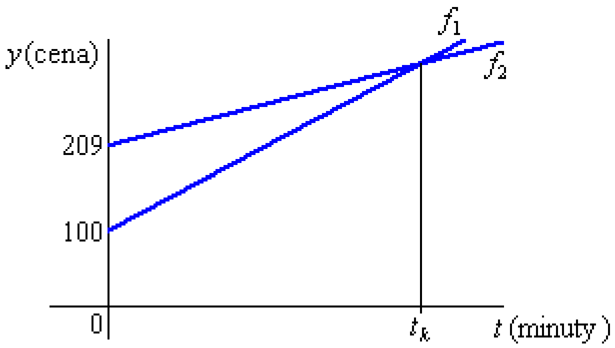
Příklad 1.2.
Telefonní společnost nabízela několik cenových programů. Rozhodujeme se mezi dvěmi nabídkami:
MINI, kdy platíme měsíční paušál 190 Kč, volný kredit je 90 Kč a minuta místního volání ve špičce stojí 2,80 Kč, mimo špičku 1,40 Kč.
STANDARD, kdy je měsíční paušál 299 Kč, volný kredit 90 Kč a místní volání je o polovinu levnější než u MINI.
Z předchozích měsíčních výpisů máme zjištěno, že naše hovory ve špičce a mimo špičku jsou v poměru 1:2. Která z nabídek je pro nás výhodnější?

Řešení: Závislost měsíčního poplatku y na počtu provolaných minut t je dána lineární funkcí tvaru $y = at + b$.

V nabídce MINI je $y = 2{,}8 \cdot \frac{t}{3} + 2.1{,}4 \cdot \frac{t}{3} + 190 - 90$, odtud po úpravě $f_1 : y = \frac{28}{15}t + 100$.

V nabídce STANDARD platíme $y = 1{,}4 \cdot \frac{t}{3} + 2.0{,}7 \cdot \frac{t}{3} + 299 - 90$, odtud $f_2 : y = \frac{14}{15}t + 209$.

Na obrázku jsou funkce f_1 a f_2 graficky znázorněné. Hodnota t_k udává počet provolaných minut, kdy jsou poplatky vyrovnané. Určíme ji jako první souřadnici průsečíků obou přímek: $\frac{28}{15}t_k + 100 = \frac{14}{15}t_k + 209$. Tedy $t_k \cong 116{,}78$ minut.



Provoláme-li tedy měsíčně méně než 117 minut, je pro nás výhodnější nabídka MINI, v opačném případě je výhodnější nabídka STANDARD.

Úlohy 1.1.

Poznámka: V úlohách této kapitoly se vyskytují funkce, které jsou standardně na střední škole probírané. Pokud si je ale potřebujete připomenout, vraťte se k vyřešení příslušných úloh až po prostudování podkapitoly 1.2., ve které budou tyto funkce podrobně popsány.

1. Rozhodněte, zda je zadanou rovnicí určena funkce:

a) $x - y^2 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 4 = 0$, c) $x^2 + y + 1 = 0$, d) $y = \sin x$,

e) $y = |x-1|$, f) $y = 2.\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, g) $y = -\log_2(x-8)$, h) $x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^y$.

2. Určete funkční hodnotu funkce *f* pro dané $x \in \mathbf{R}$:

a) $f : y = \sqrt{2-3x},\ x \in \left\{-2, 0, \dfrac{2}{3}, 1\right\}$, b) $f : y = \dfrac{x^2-4}{x+2},\ x \in \left\{-4, -2, 0, \dfrac{5}{2}\right\}$,

c) $f : y = \left|2x^2 - 4x\right| + 3,\ x \in \left\{-\dfrac{1}{2}, 0, 2, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right\}$, d) $f : 3^{xy} = x,\ x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

3. Určete definiční obor funkce:

a) $f_1 : y = x^2 - 5x + 6$, d) $f_4 : y = \sqrt{4 - x^2}$, b) $f_2 : y = \dfrac{4}{x^2+3}$,

e) $f_5 : y = \log(x+5)$, c) $f_3 : y = \dfrac{x-1}{x+3}$, f) $f_6 : y = \dfrac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x}$.

4. Určete funkci, která vyjadřuje závislost obsahu *S* rovnostranného trojúhelníka na délce jeho strany *a*.

5. Máme turistickou mapu v měřítku 1:50 000. Napište rovnici funkce, která vyjadřuje závislost skutečné vzdálenosti *y* na jejím rozměru *x* v mapě. Pak určete:

a) Jak velká je ve skutečnosti vzdálenost, která je na mapě znázorněná úsečkou délky 2 cm.

b) Jaký je ve skutečnosti obsah čtvercového pozemku, který má na mapě stranu dlouhou $a = 2{,}6$ cm.

6. Uvažujte množinu funkcí *f* : y = 0,5*x* + *b*, kde $b \in \mathbf{R}$ je parametr. Najděte všechny hodnoty parametru *b* tak, aby příslušné funkce pro $x \in \langle -3, 0\rangle$ nabývaly funkční hodnoty z intervalu $\langle -4, 7\rangle$.

Výsledky úloh 1.1.

1. a) ne, b) ne, c) ano, d) ano, e) ano, f) ano, g) ano, h) ano.

2. a) $f(-2) = 2\sqrt{2}$, $f(0) = \sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$, $f(1)$ neexistuje.

b) $f(-4) = -6$, $f(-2)$ neexistuje, $f(0) = -2$, $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$,

c) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{2}$, $f(0) = 3$, $f(2) = 3$, $f\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = 2\sqrt{6}$,

d) $f(-1)$ neexistuje, $f(0)$ neexistuje, $f(1) = 0$, $f(2) = \log_3 \sqrt{2}$.

3. a) $D(f_1) = \mathbf{R}$, b) $D(f_2) = \mathbf{R}$, c) $D(f_3) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, d) $D(f_4) = \langle -2, 2\rangle$,

e) $D(f_5) = (-5, \infty)$, f) $D(f_6) = \mathbf{R} \setminus \left\{k \cdot \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

4. $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 5. $y = 50\,000x$, a) 1 km, b) 1,69 km^2, 6. $b \in \left\langle -\dfrac{5}{2}, 7\right\rangle$.

1.2 Vlastnosti funkce

Rovnost funkcí

Definice 1.3.: Funkce $f(x)$ a $g(x)$ se rovnají právě tehdy, když mají stejné definiční obory, a pro všechna $x \in D(f)(= D(g))$ platí $f(x) = g(x)$.

Příklad 1.3.

Rozhodněte, zda se rovnají funkce $f : y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ a $g : y = x - 1$.

Řešení: Pro všechna čísla x z $D(f)$ platí $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1 = g(x)$. Přesto se však funkce $f(x)$ a $g(x)$ nerovnají. Mají totiž různé definiční obory. Definičním oborem funkce $f(x)$ je množina $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, ale definičním oborem funkce $g(x)$ je množina $D(g) = \mathbf{R}$.

Sudost a lichost funkce

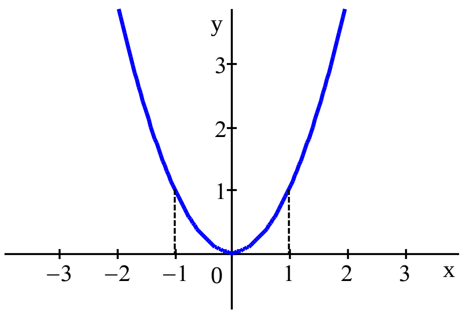
Definice 1.4.: Funkce $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f) = (-a, a)$, kde $a > 0$, se nazývá :

- sudá, když pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$,
- lichá, když pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.

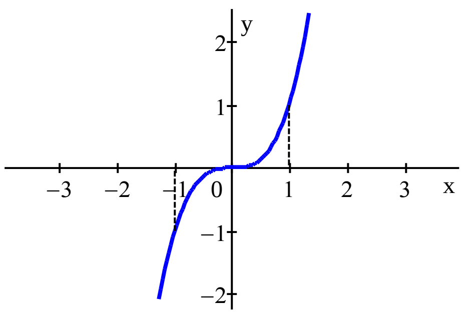
Sudost a lichost funkce je možné určit na základě grafu. Graf sudé funkce je souměrný podle osy *y*, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Příklady sudé a liché funkce

Graf sudé funkce $f : y = x^2$



Graf liché funkce $g : y = x^3$



Příklad 1.4.

Jsou dány funkce: a) $f : y = 3x^3 - x$, b) $g : y = \dfrac{\sin x}{x}$, c) $h : y = 2x + 1$.

Rozhodněte pomocí definice, zda jsou tyto funkce sudá nebo liché.

Řešení: Pro každou z funkcí vypočítáme hodnotu v bodě $-x$ a porovnáme ji s funkční hodnotou v bodě x.

a) Platí : $f(-x) = 3(-x)^3 - (-x) = -3x^3 + x = -(3x^3 - x) = -f(x)$, tedy f je lichá funkce.

b) Platí $g(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x} = g(x)$, tedy g je sudá funkce.

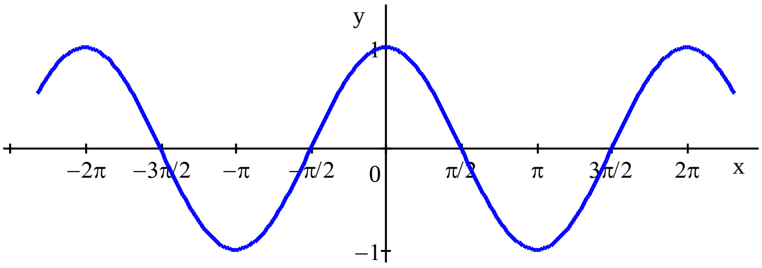
c) Platí $h(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1 = -(2x - 1) \neq \pm h(x)$, h tedy není ani sudá ani lichá funkce.

Periodičnost funkce

Definice 1.5.: Funkci $y = f(x)$ nazýváme periodickou s periodou $p \in \mathbf{R}^+$ v oboru $D(f)$, který s každým bodem x obsahuje i bod $x \pm p$, jestliže pro každé číslo $x \in D(f)$ platí vztah $f(x+p) = f(x)$.

Funkční hodnoty periodických funkcí se tedy pravidelně opakují.

Příklad periodické funkce



Funkce $y = \cos x$ je periodická s periodou 2π.

Také funkce $y = \sin x$ je periodická s periodou 2π, zatímco goniometrické funkce $y = \mathrm{tg} x$ a $y = \mathrm{cotg} x$ jsou periodické s periodou π.

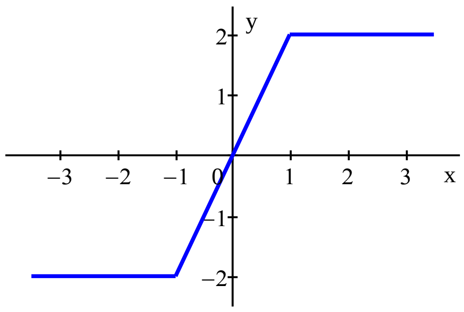
Monotónnost funkce

Definice 1.6.: O funkci $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ říkáme, že je na tomto oboru

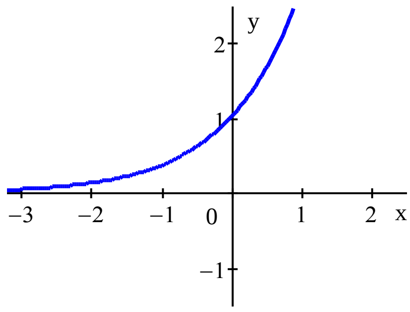
- rostoucí, když pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- klesající, když pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- neklesající, když pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) \le f(x_2)$,
- nerostoucí, když pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Má-li funkce pouze jednu z uvedených vlastností, nazývá se monotónní.
Má-li funkce pouze jednu z prvních dvou vlastností, nazývá se ryze monotónní.

Příklady monotónních funkcí



Funkce $g : y = |x+1| - |1-x|$ je neklesající.
Podle definice jde o funkci monotónní.



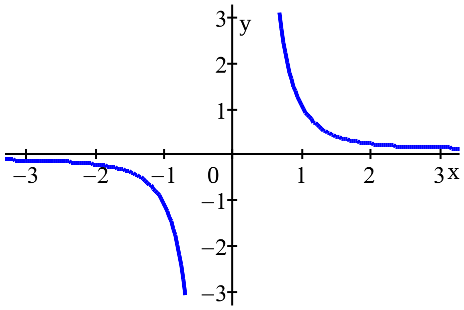
Funkce $f : y = 2^x$ je rostoucí.
Podle definice jde o funkci ryze monotónní.

Monotónnost funkce se naučíme později vyšetřovat s využitím derivace funkce.

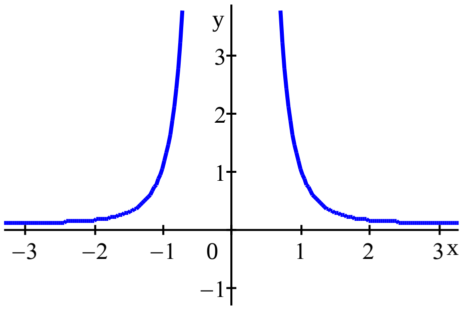
Prostá funkce

Definice 1.7.: Funkce $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ je prostá, když pro libovolná čísla $x_1, x_2 \in D(f)$, pro která je $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Příklad prosté funkce



Funkce $f : y = \dfrac{1}{x^3}$ je prostá.

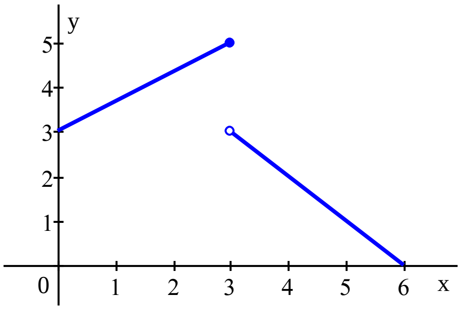


Funkce $g : y = \dfrac{1}{x^4}$ není prostá.

Vztah mezi prostou a monotónní funkcí.

Prostá funkce nabývá každé své funkční hodnoty právě jednou.

Každá ryze monotónní funkce je prostá, protože pro dvě libovolná čísla, pro která $x_1 < x_2$, kde $x_1, x_2 \in D(f)$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ nebo $f(x_1) > f(x_2)$, tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Opačné tvrzení ale neplatí, protože prostá funkce nemusí být ryze monotónní, jak ukazuje následující obrázek :



Kladná a záporná funkce

Definice 1.8.: O funkci $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ říkáme, že je na tomto oboru

- kladná, jestliže pro každé číslo $x \in D(f)$ platí $f(x) > 0$,
- záporná, jestliže pro každé číslo $x \in D(f)$ platí $f(x) < 0$,
- nekladná, jestliže pro každé číslo $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq 0$,
- nezáporná, jestliže pro každé číslo $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq 0$.

Příklad 1.5.

Rozhodněte, kde je funkce $f : y = \dfrac{x+3}{x-1}$ ve svém definičním oboru kladná a kde je záporná.

Řešení: Definiční obor dané funkce je množina $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Funkce je kladná, je-li $\dfrac{x+3}{x-1} > 0$. Podíl je kladný, pokud čitatel i jmenovatel je kladný nebo pokud čitatel i jmenovatel je záporný.

$(x+3).(x-1) > 0 \Leftrightarrow (x+3 > 0 \wedge x-1 > 0) \vee (x+3 < 0 \wedge x-1 < 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > -3 \wedge x > 1) \vee (x < -3 \wedge x < 1) \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Funkce je záporná, je-li $\frac{x+3}{x-1} < 0$. Podíl je záporný, pokud čitatel a jmenovatel mají různá znaménka.

$$(x+3).(x-1) < 0 \Leftrightarrow (x+3>0 \wedge x-1<0) \vee (x+3<0 \wedge x-1>0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x>-3 \wedge x<1) \vee (x<-3 \wedge x>1) \Leftrightarrow x \in (-3,1) \vee x \in \{\ \} \Leftrightarrow x \in (-3,1).$$

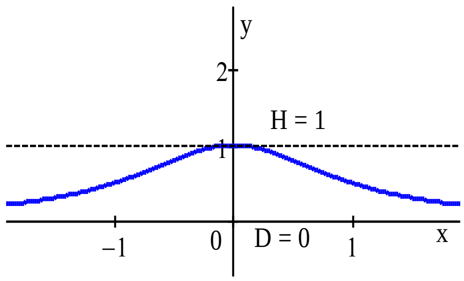
Pro $x = -3$ je funkční hodnota rovna 0, tedy v tomto bodě graf funkce protíná osu *x*.

Ohraničená funkce

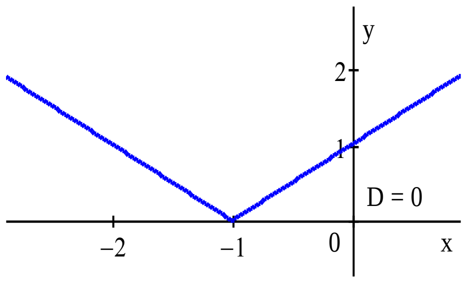
Definice 1.9.: O funkci $y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ říkáme, že je na tomto oboru

- ohraničená shora (zdola), jestliže existuje takové číslo *H* (*D*), že pro všechna čísla $x \in D(f)$ platí $f(x) \le H$ ($f(x) \ge D$),
- ohraničená, je-li ohraničená shora i zdola. V opačném případě se funkce nazývá neohraničená.

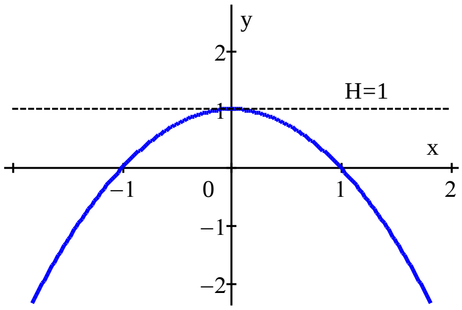
Příklady na ohraničenost funkce



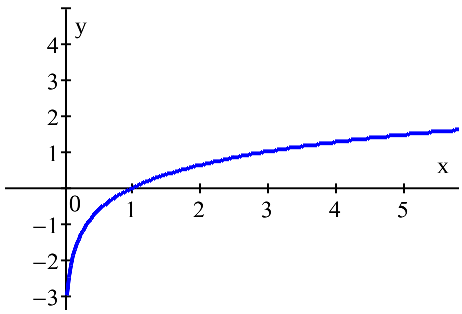
Funkce $y = \frac{1}{1+x^2}$ je ohraničená.



Funkce $y = |x+1|$ je ohraničená zdola.



Funkce $y = -x^2 + 1$ je ohraničená shora.



Funkce $y = \log_3 x$ je neohraničená.

Příklad 1.6.

Ukažte, že funkce $f : y = \sin x$ je ve svém definičním oboru ohraničená.

Řešení: Pro všechna čísla *x* z definičního oboru $D(f) = \mathbf{R}$ platí $\sin x \ge -1$, tedy funkce je ohraničená zdola. Pro všechna čísla *x* z definičního oboru platí $\sin x \le 1$, tedy funkce je ohraničená shora. Protože funkce je ohraničená shora i zdola, je na svém definičním oboru ohraničená.

Úlohy 1.2.

1. Rozhodněte, zda se rovnají funkce:

a) $f: y = \dfrac{x}{|x|}$, $g: y = 1$, b) $f: y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$, $g: y = x - 1$,

c) $f: y = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$, $g: y = x + 1$.

2. Rozhodněte, zda funkce je sudá nebo lichá :

a) $f: y = \dfrac{x^3 + 2x}{|x|}$, b) $g: y = 2\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$, c) $h: y = \log_3 \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$,

d) $i: y = -x^2 - 2x + 1$, e) $j: y = \operatorname{sgn} x$, f) $k: y = \cos x - 2\sqrt{1 - x^2}$.

3. Rozhodněte, zda je funkce periodická a určete její periodu :

a) $f: y = e^{|x|}$, b) $g: y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, c) $h: y = 2|\sin x|$.

4. Určete intervaly, na nichž je funkce rostoucí nebo klesající a určete, které funkce jsou ryze monotónní:

a) $f: y = |2x - 3| - x$, b) $g: y = x^2 + 2x + 5$, c) $h: y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$,

d) $k: y = -\operatorname{tg} x$, e) $l: y = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{2x}$.

5. Určete, pro které hodnoty $a \in R$ jsou zadané funkce rostoucí (klesající) :

a) $f: y = \left(\dfrac{a - 3}{a + 5}\right)^x$, b) $g: y = \log_{\frac{a+1}{a}} x$.

6. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou prosté :

a) $f: y = 3x - 6$, b) $g: y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, c) $h: y = \ln(2x + 3)$.

7. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou ohraničené :

a) $f: y = x^2$, b) $g: y = 2x + 1$, c) $h: y = 1 + \cos x$.

Výsledky úloh 1.2.

1. a) $f \neq g, D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}, D(g) = \mathbf{R}$,

b) $f \neq g, D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-2\}, D(g) = \mathbf{R}$,

c) $f = g, D(f) = D(g) = \mathbf{R}$.

2. a) lichá , b) není ani lichá ani sudá, c) sudá, d) není ani lichá ani sudá, e) lichá, f) sudá.

3. a) není periodická, b) je periodická $p = 2\pi$, c) je periodická $p = \pi$.

4. a) klesá pro $x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$, roste pro $x \in \left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$, není monotónní,

b) roste pro $x \geq -1$, klesá pro $x \leq -1$, není monotónní,

c) roste na intervalech $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, není monotónní,

d) klesá na intervalech definičního oboru, není monotónní,

e) roste v **R**, je ryze monotónní.

5. a) rostoucí pro $a \in (-\infty, -5)$, klesající pro $a \in (3, +\infty)$,

b) rostoucí pro $a \in (0, +\infty)$, klesající pro $a \in (-\infty, -1)$.

6. a) ano, b) ne, c) ano.

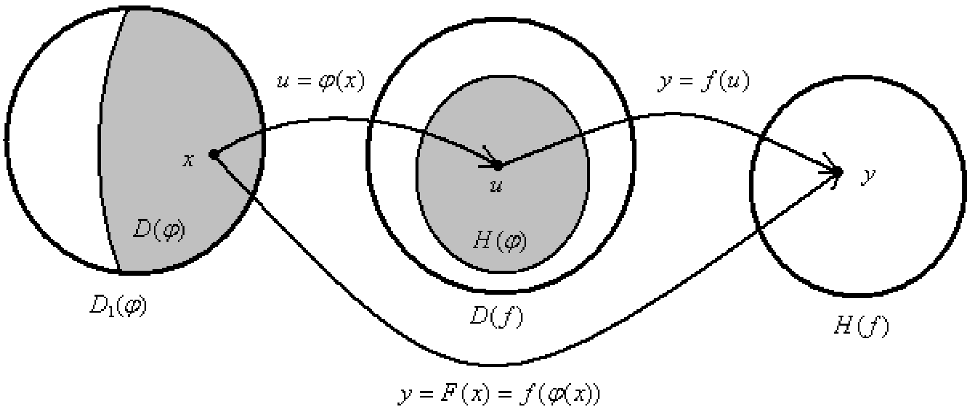
7. a) ohraničená zdola, b) neohraničená, c) ohraničená.

1.3 Složená a inverzní funkce

Složená funkce

Definice 1.10.: Nechť je daná funkce $u=\varphi(x)$ s definičním oborem $D_1(\varphi)$ a funkce $y=f(u)$, která je definovaná na množině $D(f)$. Nechť $D(\varphi)$ je taková neprázdná podmnožina množiny $D_1(\varphi)$, že pro každé číslo $x\in D(\varphi)$ patří příslušné číslo $u=\varphi(x)$ do množiny $H(\varphi)\subseteq D(f)$.
Ke každému $x\in D(\varphi)$ nyní přiřaďme hodnotu $y=F(x)=f(\varphi(x))$. Tato funkce se nazývá složená funkce, přičemž f je její vnější složka a φ vnitřní složka.

Pro skládání funkcí se používá rovněž označení $F=f\circ\varphi$ (čteme f po φ).



Příklad 1.7.
Z funkcí $f: y=\sqrt{2x+1}$ a $\varphi: y=3x^2-4$ vytvořte složenou funkci : a) $f\circ\varphi$, b) $\varphi\circ f$.
Řešení: a) $f\circ\varphi=f(\varphi(x))=\sqrt{2.(\varphi)+1}=\sqrt{2.(3x^2-4)+1}=\sqrt{6x^2-7}$,
b) $\varphi\circ f=\varphi(f(x))=3.f^2-4=3.\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-4=3.|2x+1|-4$.

Příklad 1.8.
Složenou funkci $f: y=\sin(2x+1)$ rozložte na složky.
Řešení: Vnitřní složkou je funkce $\varphi: u=2x+1$,
vnější složkou je funkce $f: y=\sin u$.

Příklad 1.9.
Určete definiční obor složené funkce $y=F(x)$, která má vnitřní složku $\varphi: u=\dfrac{1}{x}$ a vnější složku $f: y=\sqrt{u-1}$.

Řešení: Složená funkce má tvar $y=F(x)=f(\varphi(x))=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$.

Funkce $u=\varphi(x)$ má definiční obor $D_1(\varphi)=\mathbf{R}/\{0\}$, funkce $y=f(u)$ má definiční obor $D(f)=\langle 1,\infty)$. Definičním oborem složené funkce $F(x)$ je množina čísel x z množiny $D_1(\varphi)$, pro která platí $u=\dfrac{1}{x}\geq 1$. Řešením nerovnice $\dfrac{1}{x}\geq 1$ interval $(0,1\rangle$, což je definiční obor zadané složené funkce.

Inverzní funkce

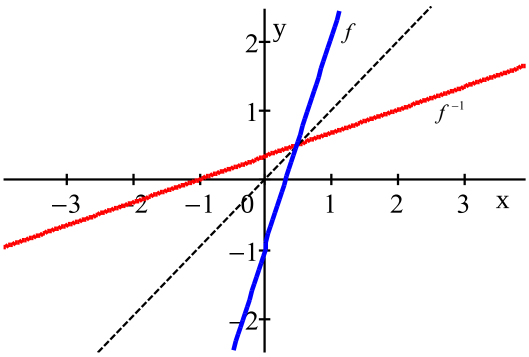
Definice 1.11.: Nechť $y = f(x)$ je prostá funkce s definičním oborem $D(f)$. Funkce, která každému číslu $y \in H(f)$ přiřazuje takové číslo $x \in D(f)$, pro které platí $y = f(x)$, se nazývá inverzní funkce k funkci $f(x)$. Značíme ji f^{-1}, tedy $x = f^{-1}(y)$.

Provedeme-li záměnu proměnných $y \leftrightarrow x$, lze psát inverzní funkce ve tvaru $y = f^{-1}(x)$.
Tedy tak, aby nezávisle proměnná byla označena písmenem *x*, jak jsme zvyklí.
Obory funkcí f a f^{-1} jsou vzájemně zaměněné, tedy je $D(f)=H(f^{-1})$ a $H(f)=D(f^{-1})$.
Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle přímky $y = x$.

Příklad 1.10.
Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci $f: y = 3x - 1$.
Řešení: Funkce *f* je rostoucí v **R**, tedy prostá. Existuje k ní tedy inverzní funkce f^{-1}. Určíme ji tak, že z rovnice $y = 3x - 1$ vyjádříme proměnnou *x* a poté zaměníme proměnné $x \leftrightarrow y$:

$$f: y = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{y}{3} + \frac{1}{3}, \quad D(f) = R = H\left(f^{-1}\right)$$

$$f^{-1}: y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \quad D\left(f^{-1}\right) = R = H(f)$$



Úlohy 1.3.
1. Určete funkci $h = f \circ g$ a její definiční obor:

a) $f: y = \sqrt{x}, \quad g: y = \operatorname{tg} x$, b) $f: y = \log_5 x, \quad g: y = 2x - 3$,

c) $f: y = \sqrt{x}, \quad g: y = 1 - 2\sin x$, d) $f: y = \operatorname{arctg} x, \quad g: y = \dfrac{x-1}{x+1}$,

e) $f: y = \sin x, \quad g: y = \log x$, f) $f: y = e^x, \quad g: y = \sqrt{4 - x}$.

2. Rozhodněte, zda k daným funkcím mohou existovat funkce inverzní :
a) $f(n)$ udává počet studentů denního studia na VŠE, kteří mají narozeniny *n*-tý den v roce,
b) $f(x)$ udává tlak vzduchu v nadmořské výšce *x* metrů nad mořem,
c) $f(x)$ udává elektrický proud protékající vodičem s odporem *x* ohmů při konstantním napětí na koncích vodiče.
3. K daným funkcím určete funkce inverzní (pokud existují):

a) $f: y = \sqrt{4 - x}, \quad x \in \left(-\infty, 4\right\rangle$, b) $g: y = x^2 - 1, \quad x \in \left\langle 0, \infty\right)$,

c) $h: y = x^2 + 3, \quad x \in R$, d) $k: y = \log_3(2x + 3), \quad x \in \left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.

4. Dráha *s* závislá na čase *t* je dána funkcí $f : s = f(t) = 120 + 80t$.

a) Napište rovnici inverzní funkce f^{-1},

b) vyjádřete slovy, co funkce f^{-1} udává.

5. Rozhodněte, zda platí věta: Je-li $f : y = \dfrac{1}{x}$, pak $f^{-1} = f$.

Výsledky úloh 1.3.

1.a) $h : y = \sqrt{\operatorname{tg} x},\ D(h) = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\langle k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right)$,

b) $h : y = \log_5(2x-3),\ D(h) = \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$,

c) $h : y = \sqrt{1 - 2\sin x},\ D(h) = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\langle \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi, \dfrac{13}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$,

d) $h : y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1},\ D(h) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, e) $h : y = \sin(\log x),\ D(h) = (0, \infty)$,

f) $h : y = e^{\sqrt{4-x}}, D(h) = (-\infty, 4\rangle$

2. a) ne, b) ano, c) ano

3. a) $f^{-1} : y = 4 - x^2,\ D(f^{-1}) = \langle 0, \infty),$ b) $g^{-1} : y = \sqrt{x+1},\ D(g^{-1}) = \langle -1, \infty)$,

c) funkce *h* není prostá, neexistuje k ní funkce inverzní, d) $k^{-1} : y = \dfrac{1}{2}(3^x - 3),\ D(k^{-1}) = \mathbf{R}$.

4. a) $f^{-1} : t = \dfrac{1}{80}s - \dfrac{3}{2}$, b) f^{-1} udává čas *t*, potřebný na vykonání dráhy *s*.

5. ano

Shrnutí kapitoly

Pojem funkce jedné proměnné, její obory a graf funkce.

Funkce je předpis přiřazující každému číslu z definičního oboru jedno číslo z oboru hodnot. Graf funkce je množina bodů $[x, y]$ v rovině takových, že $y = f(x)$.

Základní vlastnosti funkce: sudost a lichost, periodičnost, monotónnost, ohraničenost a prostá funkce.

Funkce je rostoucí, jestliže s rostoucí hodnotou proměnné *x* rostou hodnoty $f(x)$. Podobně se definuje funkce klesající. Funkce, která je pouze rostoucí nebo pouze klesající, se nazývá ryze monotónní.

Funkce $f(x)$ se nazývá prostá, jestliže ke každému *y* existuje jediné *x* takové, že $y = f(x)$.

Jestliže jsou všechny hodnoty $f(x)$ kladné, nazývá se funkce kladná, jsou-li všechny hodnoty $f(x)$ záporné, nazývá se funkce záporná.

Je-li graf funkce souměrný podle osy *y*, nazývá se funkce sudá.

Je-li graf souměrný podle počátku, nazývá se funkce lichá.

Jestliže se hodnoty $f(x)$ pravidelně opakují, nazývá se funkce periodická.

Jestliže všechny hodnoty funkce leží v intervalu $\langle D, H\rangle$, nazývá se funkce ohraničená.

Pojem složené funkce a její rozklad na složky.

Složená funkce je definována vztahem $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Funkci *f* nazýváme vnější a funkci *g* vnitřní složkou složené funkce.

Pojem inverzní funkce, nalezení k dané funkci inverzní funkci.

Inverzní funkce f^{-1} k dané funkci f je definovaná tak, aby platil vztah $f^{-1}(f(x)) = x$.
Inverzní funkci je možné vytvořit pouze k prosté funkci.

Klíčové pojmy

- funkce,
- definiční obor,
- obor hodnot,
- graf funkce,
- rostoucí a klesající funkce,
- prostá funkce,
- kladná a záporná funkce,
- sudá a lichá funkce,
- periodická funkce,
- ohraničená funkce,
- inverzní funkce,
- složená funkce.

Samostatný test

A. Teoretická část

l. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Osa y je grafem funkce.
b) Osa x je grafem funkce.
c) Existuje funkce, která je zároveň sudá i lichá.
d) Existuje sudá funkce, která je zároveň ryze monotónní.
e) Předpisem $f: y^2 = x$ je zadána funkce.
f) Přepisem $g: y = x^2$ je zadána funkce.
g) Ke každé funkci, která je rostoucí v definičním oboru, existuje funkce inverzní.
h) Funkce, které jsou vzájemně inverzní, jsou prosté.

B. Praktická část

2. Určete definiční obory funkcí:

a) $f: y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$, b) $g: y = \ln(2x - 4)$, c) $h: y = \dfrac{8 - x}{x^2 + 4}$.

3. Rozhodněte, která z uvedených funkcí je sudá a která lichá :

a) $f: y = x^2 + \cos x$, b) $g: y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$, c) $h: y = \dfrac{2}{x^5}$.

4. Rozhodněte, které z uvedených funkcí jsou prosté:

a) $f: y = 2$, b) $g: y = 3x - 1$, c) $h: y = x^2$.

5. K funkci f na daném intervalu určete inverzní funkci f^{-1} a stanovte její definiční obor:

a) $f: y = x^2 - 1,\ x \in (-\infty, 0\rangle$, b) $f: y = \dfrac{2 - x}{x + 1},\ x \in \mathbf{R} / \{-1\}$.

6. Určete složenou funkci $h = f \circ g$ a stanovte její definiční obor:

a) $f: y = \sqrt{x},\ x \in \langle 0, \infty);\ g: y = x^2 - 9,\ x \in \mathbf{R}$,

b) $f: y = -x^2 + 2x - 1,\ x \in \mathbf{R};\ g: y = \sqrt{x},\ x \in \langle 0, \infty)$.